一个包含 Smarandache可乘函数方程的正整数解

贺艳峰[1] 任卫军[2]

(1. 延安大学 计算机学院; 2. 延安市 质量安全监督站, 陕西 延安 716000)

摘 要: 利用初等方法, 研究一个包含 Smarandache函数方程的可解性, 给出了它的所有正整数解.

关键词: Smarandache可乘函数; 方程; 可解性

中图分类号: O156.4 文献标识码: A 文章编号: 1004-602X(2008)02-0001-02

1 引言及结论

对任意正整数 n, 我们定义一种 Smarandache可乘函数 $\bar{S}(n)$为:

$$\bar{S}(n) = \max_{1\le i\le r}\{\alpha_i p_i : n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}\}$$

在文献[1]中, Liu Yanni and Gao Peng获得了一个有关 $\bar{S}(n)$的复合函数的一个均值估计式。即就是, 对任意实数 $x \geqslant 2$有

$$\sum_{n\le x} \bar{S}(P_d(n)) = \frac{4}{72}\frac{x^2}{\ln x} + C\cdot\frac{x^2}{\ln x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^3 x}\right)$$

其中 $P_d(n)$是 n的所有因子的乘积函数, 即 $P_d(n) = \prod_{d|n} d$.

在文献[2]中, Ma Jinping获得了有关 $\bar{S}(n)$的一个均值估计式. 即就是对任意实数 $x \geqslant 2$有

$$\sum_{n\le x} \bar{S}(n) = \frac{\pi^2}{12}\frac{x^2}{\ln x} + O\left(\frac{x^2}{\ln^2 x}\right)$$

在[3]中, Smarandache要求我们研究这些可乘函数的性质. 这篇文章中, 我们主要利用初等方法研究了一个包含 Smarandache函数 $\bar{S}(n)$方程的可解性, 并给出该方程的所有正整数解. 具体地说也就是证明下面的:

定理 方程

$$\bar{S}\left(\sum_{k=1}^{n} n^k\right) = \varphi(n)\prod_{k=1}^{n}\bar{S}(k) \qquad (1)$$

有且只有一个解 $n = 1$.

2 两个简单引理

为了完成定理的证明, 我们需要两个简单引理, 现叙述并证明如下:

引理 1 对于任意正整数 n, $n > 1$, 有 $\bar{S}(n) > 1$.

证明 由于 $n > 1$, 所以由[4]的代数基本定理, n有典型分解式

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}.$$

而且 $p = \min_{1\le i\le r}\{p_i\} \geqslant 2$, 根据 $\bar{S}(n)$的定义知,

$$\bar{S}(n) \geqslant p > 1$$

于是完成了引理 1的证明.

引理 2 如果 a, b是互素的正整数, 那么

$$\bar{S}(ab) = \max\{\bar{S}(a), \bar{S}(b)\} \qquad (2)$$

证明 分两种情况考虑:

(1)若 a与 b中至少有一个为 1, 则(2)式显然成立;

(2)若 a和 b都不等于 1, 则

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r},\quad b = p_{r+1}^{\alpha_{r+1}} p_{r+2}^{\alpha_{r+2}} \cdots p_t^{\alpha_t}$$

由于 $(a, b) = 1$, 所以 $p_1, p_2, \cdots, p_r$及 $p_{r+1}, p_{r+2}, \cdots p_t$是 t个两两不等的素数. 又由 $\bar{S}(n)$的定义知,

$$\bar{S}(ab) = \max_{1\le i\le t}\{\alpha_i p_i\} = \max\{\max_{1\le i\le r}\{\alpha_i p_i\}, \max_{r+1\le i\le t}\{\alpha_i p_i\}\} = \max\{\bar{S}(a), \bar{S}(b)\}.$$

于是完成了引理 2的证明.

引理 3 对任意的正整数 n, 有 $1 + n + n^2 + \cdots$

收稿日期: 2007-11-04

作者简介: 贺艳峰(1976—), 女, 陕西神木人, 延安大学讲师, 西北大学在读博士。

$+n^{n-1}$是奇数．

证明 分两种情况考虑：

(1)当n是奇数时，n及n的任意次方都是奇数，则$n+n^2+\cdots+n^{n-1}$是$n-1$个奇数的和，及$n+n^2+\cdots+n^{n-1}$是偶数，同时得到$1+n+n^2+\cdots+n^{n-1}$是奇数；

(2)当n是偶数时，$n+n^2+\cdots+n^{n-1}$是偶数，同时有$1+n+n^2+\cdots+n^{n-1}$是奇数．

由上面的讨论知，不管n取奇数还是偶数，$1+n+n^2+\cdots+n^{n-1}$总是奇数．

于是完成了引理3的证明．

引理4 对任意的正整数$n(n>5)$，有$n\log n<2^{n-1}$.

证明 当$x>5$时，令$f(x)=2^{x-1}-x\log x$，则$f(x)$的导数

$$f'(x)=2^{x-1}\log 2-\log x-1=\log 2^{2^{x-1}}-\log ex \quad (3)$$

我们能够得到$f'(x)>0$. 事实上，由于$\log x$是递增函数，所以只需验证

$$2^{2^{x-1}}>ex$$

成立即可．因为当$x>5$时，$2^{x-1}>2(x-1)$即$2^{2^{x+1}}>4^{x+1}$，如果我们证明$4^{x-1}>ex$，或者证明$\log 4^{x-1}>\log ex$，或$x-1>\log x+1$则(3)>0成立．我们令

$$g(x)=x-\log x-2$$

由于当$x>5$时，其导数$g'(x)>0$. 所以$g(x)$为递增函数，及

$$g(x)>g(5)=5-\log 5-2>5-2-2=1>0.$$

于是得到$2^{2^{x+1}}>ex$及$f(x)$也是递增函数．从而有$f(x)>f(5)=2^{5-1}-5\log 5>64-10>0$即有$n\log n<2^{n-1}$.

于是完成了引理4的证明．

3 定理的证明

现在我们来完成定理的证明．

(ⅰ)当$n=1$时，(1)显然成立．

(ⅱ)当$2\leqslant n\leqslant 5$时，通过简单验证，这些n都不是方程(1)的解．

(ⅲ)当$n>5$时，设n是方程(1)的解．此时由于$(n,1+n+n^2+\cdots n^{n-1})=1$，由引理2有

$$\bar{S}\left(\sum_{k=1}^{n} n^k\right)=\bar{S}(n(1+n+n^2+\cdots n^{n-1}))=\max\{\bar{S}(n),\bar{S}(1+n+n^2+\cdots n^{n-1})\}.$$

如果$\bar{S}(n)>\bar{S}(1+n+n^2+\cdots n^{n-1})$，则

$$\bar{S}\left(\sum_{k=1}^{n} n^k\right)=\bar{S}(n).$$

代入方程(1)，得$\bar{S}(n)=\varphi(n)\prod_{k=1}^{n}\bar{S}(k)$，即

$$1=\varphi(n)\prod_{k=1}^{n-1}\bar{S}(k).$$

又当$n\geqslant 5$时，由引理1得$\bar{S}(n-1)>1$. 故上式不可能成立．也就是说一定有

$$\bar{S}(n)<\bar{S}(1+n+n^2+\cdots n^{n-1}). \quad (4)$$

联立(1)和(4)，得

$$\bar{S}(1+n+n^2+\cdots n^{n-1})=\varphi(n)\prod_{k=1}^{n}\bar{S}(k).$$

令$1+n+n^2+\cdots n^{n-1}=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$是$1+n+n^2+\cdots n^{n-1}$的标准分解式，由$\bar{S}$定义得

$$\bar{S}(1+n+n^2+\cdots n^{n-1})=\max_{1\leqslant i\leqslant r}\{\alpha_i p_i\}=\alpha p. \quad (5)$$

联立(1)，(4)和(5)得

$$\alpha p=\varphi(n)\prod_{k=1}^{n}\bar{S}(k) \quad (6)$$

即$p|\varphi(n)$或$p|\bar{S}(k)$，$1\leqslant k\leqslant n$且

$$\alpha=\frac{1}{p}\varphi(n)\prod_{k=1}^{n}\bar{S}(k)>\frac{1}{p}2^{n}>2^{n-1} \quad (7)$$

由引理3知，$1+n+n^2+\cdots n^{n-1}$是奇数，且$p\geqslant 3$，$1\leqslant i\leqslant r$又$p<n^n$，即

$$\alpha<\frac{n\log n}{\log p}\leqslant\frac{n\log n}{\log 3}<n\log n \quad (8)$$

联立式(7)和(8)，得$n\log n<2^{n-1}$. 由引理4知，这是不可能的．这充分说明对所有>5的正整数，都不是方程(1)的解．综合以上(ⅰ)，(ⅱ)及(ⅲ)，得到方程(1)有且只有唯一正整数解，且其解为$n=1$.

于是就完成了定理的证明．

参考文献：

[1] Liu Yanni, Gao Peng. Smarandache Multiplicative Function[J]. Scientia Magna, 2006, 1(1): 103－107.

[2] Ma Jinping. The Smarandache Multiplicative Function[J]. Scientia Magna, 2006, 1(1): 103－107.

[3] F. Smarandache. Only Problems, Not Solutions. Chicago[M]. Xiquan Publishing House, 1993.

[4] Tom M. Apostol. Introduction to Analytic Number Theory[M]. New York: Springer－Verlag, 1976.

[责任编辑 贺小林]

(下转第4页)

由于

$$\sum_{h=1}^{k-1} h^7 = \frac{(k-1)^8}{8} + \frac{(k-1)^7}{2} + \frac{7(k-1)^6}{12} - \frac{7(k-1)^4}{24} + \frac{(k-1)^2}{12} \quad (4)$$

$$\sum_{h=1}^{k-1} h^6 = \frac{(k-1)^7}{7} + \frac{(k-1)^6}{2} + \frac{(k-1)^5}{2} - \frac{(k-1)^3}{6} + \frac{(k-1)}{42} \quad (5)$$

结合文献[2]以及（3）（4）（5），得

$$\sum_{m\le n} a(m) = nk^4 - \frac{(k-1)(315k^7+75k^6+75k^5+327k^4+117k^3-23k^2+5969k+70)}{210}$$

这就完成定理 1的证明。

其次证明定理 2，对任意的正整数 n，$k=[\sqrt[4]{n}]$ 表示不小于 $\sqrt[4]{n}$ 的最小整数，则 $(k-1)^4 < n \le k^4$

由 $b(n)$ 的定义我们有 $b(n)=k^4$，于是

$$\sum_{(k-1)^4<m\le k^4} b(m) = k^4(k^4-(k-1)^4) = 4k^7-6k^6+4k^5-k^4 \quad (6)$$

$$\sum_{(k-1)^4<m\le n} b(m) = k^4(n-(k-1)^4) \quad (7)$$

$$\sum_{m\le n} b(m) = \sum_{h=1}^{k-1}\sum_{(h-1)^4<m\le h^4} b(m) + \sum_{(k-1)^4<m\le n} b(m) \quad (8)$$

由（6），（7），（8）式可得：

$$\sum_{m\le n} b(m) = \sum_{h=1}^{k-1}(4h^7-6h^6+4h^5-h^4) + k^4(n-(k-1)^4)$$
$$= 4\sum_{h=1}^{k-1} h^7 - 6\sum_{h=1}^{k-1} h^6 + 4\sum_{h=1}^{k-1} h^5 - \sum_{h=1}^{k-1} h^4 + k^4(n-(k-1)^4) \quad (9)$$

结合文献[2]以及（4），（5），（9）式可得：

$$\sum_{m\le n} b(m) = nk^4 - \frac{(k-1)(105k^7-135k^6-135k^5-387k^5-387k^4+2133k^3-23k^2+1993k-504)}{210}$$

这就完成定理 2的证明。

参考文献：

[1] F. Smarandache. Only problems, not Solutions[M]. Chicago: Xiquan Publ. House, 1993: 35.

[2] 郭金保，郭永平. 正整数的立方数数列的求和[J]. 延安大学学报（自然科学版），2005(4): 24.

[责任编辑　贺小林]

The Sum of the k-th Power Number's Sequence of a Positive Integral

GUO Yong-ping, GUO Jin-bao

(College of Mathematics and Computer Science, Yanan University, Yanan, Shaanxi 71600)

Abstract: Let n be a positive integer, a(n) be the largest k-power number less than n equal to n, and b(n) be the smallest k-power number greater than n or equal to n. The main purpose of this paper is to study two sum formulas of the sequences {a(n)} and {b(n)}.

Key words: k-power number; sequence; sum formula

（上接第 2页）

The Positive Integer Solution of Equation Involving Smarandache Multiplicative Function

HE Yan-feng[1], REN Wei-jun[2]

(1. College of Mathematics and Computer Science, Yanan University, Yanan;
2. Supervision Department of Quanlity and Safety in Yanan, Yanan, Shaanxi 716000)

Abstract: The main purpose of this paper is using the elementary methods to study the solvability of the equation involving Smarandache function, and give its all positive integer solution.

Key words: Smarandache multiplicative function; equation; solvability